

第二章 20 世紀前半量子力學的誕生〈前期量子學〉



Renesas Electronics Corporation.

生產本部技術開發部門

MCU device 開發部 主管技師

奧山 幸祐

現代物理的起源

在前一篇的最後預告了此篇會介紹「電晶體的誕生」，但在這之前我想先介紹半導體的物理基礎—量子力學。接下來我將參考高林武彥著作的「量子論的發展史」、J.P. McEvoy 及 Oscar Salaty 著作並由治部真理史翻譯的「量子論入門」與其他資料等，並帶大家認識 20 世紀前半物理科學的世界。

20 世紀前半，在科學分野上最大的進步是以量子力學及相對論(廣義與狹義)這兩個發現建立了現代物理學。20 世紀以前確立的牛頓萬有引力學及馬克士威的電磁力學在當時被視為是物理學的圭臬，直到 20 世紀以前科學家們皆認為這兩個理論能夠概括這個世界所有的物理現象。不過到了 19 世紀後半，出現了幾個連這兩個理論都無法清楚說明的物理現象。特別是光與電子相關的現象。例如，當加熱物質時所產生的光的強度分布(強度與頻率的關係)與當物質受光照時電子飛出(光電效應)的行為等。當時原子的構造圖尚未確立，所以這些發現都成為了十分神祕的現象。

1890 年代起，專攻熱力學的物理學家們開始致力於解開這不可思議的現象，在分析 20 世紀初提出的加熱物質會產生光的現象後，提出了「量子」的概念。在這之後，靠著眾多科學家們的努力確立了量子力學。但與其說是透過量子力學明白了原子周邊電子的狀態，倒不如說是先確立了對原子的假設才有了現在的量子力

學。特別是從 1900 年到 1924 年，在馬克斯普朗克提出「量子」的概念之後，路易·德布羅意提出「物質波」之前的這 25 年間被稱作「舊量子論」，是量子力學基礎架構的時期。在這之後，1925 年 6 月到 1926 年 6 月的這一年間，相繼確立了 3 個量子力學，分別是海森堡的矩陣力學、薛定諤的波動力學及狄拉克的量子力學。儘管這 3 種方式在數學的表達上不同，但他們是具有相同地位的。透過這 3 個力學，便可計算出電子的行為及存在概率。因為這樣的進步，在 1930 年代確立了半導體物理學，除了能正確掌握半導體元件內電子與電洞的行為外，也可更科學地去設計半導體裝置。

半導體產業是第一個使用量子力學的產業，若是沒有量子力學的話半導體產業也不會如此成功。接著是狹義相對論的確立：世界上唯一不變的是光速，而物體的質量及長度等概念是會隨著觀測者所存在的慣性系的不同而有所不同，是相對性的。以此再加上加速度運動及重力概念後並加以推廣，就完成了在重力場也適用的廣義相對論。也多虧有相對論的確立，方能奠定黑洞及宇宙的膨脹、收縮等各種宇宙現象的基礎概念。

有了這兩個學說，人類便能解釋小至原子、電子等的微觀世界，大至宇宙的宏觀世界裡的各種現象。而這些學說是在 1900 年後的 30 年內確立的。雖然相對論是由天才科學家愛因斯坦一人所完成的，但量子力學則是由馬克斯普朗克開始，包含愛因斯坦，共 10 人左右的科學家們一起共同完成的。在當時這群科學家中，有害怕在牛頓古典力學的顛峰時期裡提出這樣的新想法會受到嚴厲批評的科學家，也有才 20 歲出頭認為就該大大方方地發表想法的天才科學家，以及即便已經將通用方程式寫出來了也仍然在苦惱真相到底是什麼的科學家等等，這十位科學家分別有著鮮明的個性，形成了一幅

趣味橫生的光景。當然這些科學上的進步並不是只花 30 年就從零躍昇到如此的成果。能有這樣豐碩的成果，也必須感謝在前面提到的 19 世紀所奠定的科學基礎。科學家們在觀察牛頓的萬有引力、由法拉第及詹姆斯·克拉克·馬克士威等所提出的電磁力學、路德維希·波茲曼開始的統計力學以及其他諸多現象和數學等基礎理論時，發現了無法釐清的現象，並在持續研究的過程中形成了現在的科學理論體系。特別是統計力學，最一開始雖然是路德維希·波茲曼所提出的，但這個理論也是後來量子力學的發展上不可或缺的一部分。在那時候波茲曼因選擇支持尚未被承認的原子論，而受到那些無法跳脫牛頓及馬克士威等學說的古典物理學家們的激烈攻擊，最終受不了打擊，在 1906 年因憂鬱症自殺身亡。

在量子力學開始的 20 世紀初，大部分的物理學家皆是古典物理學的信奉者，因此新的學說也花了近 30 年左右的時間才被廣為接受。而從 1911 年開始召開了量子力學相關的國際會議，量子假說才逐漸在國際上得到認可。另外，如果從工程的角度來看 1900 年初量子力學開始蓬勃發展的原因，我想該歸功於 1800 年代後半光譜分析技術的進步以及 1920 年代與電子精密的散射實驗相關的真空技術等的進步。後者的技術後來也被運用在電子顯微鏡(包含穿透式)上。「構建理論的過程，是接近真相的捷徑」。接下來，將為大家介紹半導體物理的基礎—量子力學。

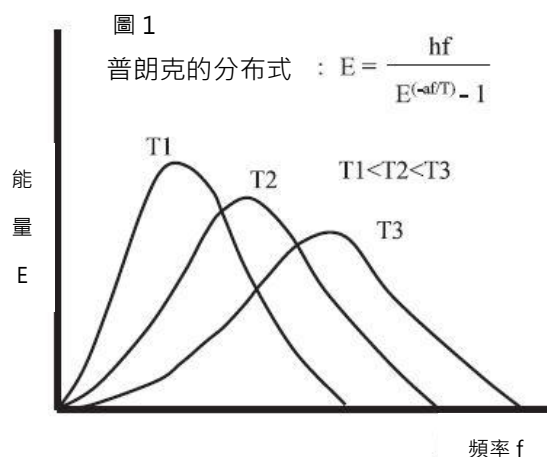
量子力學的起源(舊量子論)

從前，陶藝家必須細心地注意著烤窯的溫度。因為烤窯的溫度大大左右了陶瓷器的完成度。當時並沒有溫度計，只能仰賴陶藝家的雙眼。藉由加熱烤窯後光的顏色來判斷溫度的高低。若是使烤窯溫度持續上升的話，在較低溫時是紅色的，而隨著溫度上升顏色的變化依序為橘色、黃色、綠色、青色，接著會呈現近乎白色的明亮光束。1792 年根據約書亞·威治伍德的記錄，所有的物體在相同的溫度下燃燒都會呈現紅色的光。

光的顏色會有所不同是因為光的波長不一樣的關係。溫度低時紅色的光是較長的波長(頻率小)，若使溫度再降低的話波長也會變得更長，是肉眼無法看見的紅外線程度的波長。相較之下，溫度越高波長越短(頻率大)，光的顏色也會越接近白色。到了 19 世紀末，這種光的分析越趨活躍，不同的溫度下發出的光的強度與頻率

表 1 陶藝家的溫度標準

窯的溫度	窯中火光的顏色
550°C	暗紅色
750°C	亮紅色
900°C	橘色
1000°C	黃色
1200°C	白色



之間的關係也相繼被揭曉。

科學家們發現使密閉的空腔加熱後會產生光，並可以測量從空腔上開的小洞射出來的光。能夠吸收從外部射進來的熱輻射(如光及電磁波)等所有波長後再將其釋放的物體稱為黑體，而從黑體發出的光稱為黑體輻射。這邊的空腔輻射是指理想的再現黑體輻射的狀態。如圖 1 所示，根據空腔輻射所顯示的光的頻率分布，其呈現出最大值凸起的曲線，可看出隨著溫度升高光的頻率也會增高。而這曲線圖的分布原因也



成了 1890 年代末期理論物理學家們的中心課題之一。

而解開這個謎底的是一位柏林大學的中年教授—馬克斯·普朗克。普朗克雖然在愛因斯坦出生那年便完成論文並取得學位，但從那時候經過了 20 年皆無進展。他是信奉古典物理學且非常保守的科學家，因不喜歡先前提到的波茲曼在統計力學中計算機率的方式，所以著手研究其他計算方法，進行了長達 5 年的研究。在當時，若是用機率等方式解釋事情的話就會被當成異端分子。普朗克從加熱空腔內的物質會使其震動並產生能量而發光等角度出發，並假設從空腔內射出的光的頻率 f 與空腔壁物質的頻率(震動數)相同，再從光的頻率數推測出空腔壁物質的頻率數。可以確定的是，他注意到了空腔壁的能量。在經過 5 年的研究之後，他參考了友人維也納的公式並於 1900 年 10 月完成了能完整表達空腔輻射特性的公式(請參考圖一)。但在這個時間點，普朗克尚未完全掌握住公式裡所表達的訊息，特別是係數。這對科學家而言，是一種十分難受的心情。為了將其謎底解開，普朗克最終決定使用了被封存已久的波茲曼統計力學的解法和思考邏輯。但他並不是有了會被當時大多數的古典物理學家們批判的覺悟才選擇此路的，其實是迫於無奈。最後得出的公式為 $E=nhf(n=1,2,3\dots)$ ，是十分簡單的公式。這個公式在同年的 12 月(2 個月後)發表。在這裡， E 等於能量， n 為整數， h 為定數， f 則是空腔壁振動器的頻率數。這個公式雖然看起來簡單，但卻大大的改變了物理學的歷史。空腔壁振動器的頻率 f 的能量是以 $1hf$ 、 $2hf$ 、 $3hf$ 等整數倍改變，且得不出像是 $0.4hf$ 及 $1.33hf$ 等非整數的值。能量的值絕對是整數倍的，而且是非連續性的變化。在古典物理學裡，所有的量皆被認為是連續變化的，非連續性的變化值是一個嶄新的概念。像這樣只能取得非連續性的值的單位量稱作「量子」。振動器的能量 hf 即是量子。而以 hf 作為振動器能量的單位值等的思考方式被稱作「能量量子假說」。而 $h=6.626\times 10^{-34}Js$ 的比例常數後來也被稱為普朗克常數，並成為物理學裡的基本常數。普朗克開啟了「量子力學」的大門。但因為普朗克本身是古典物

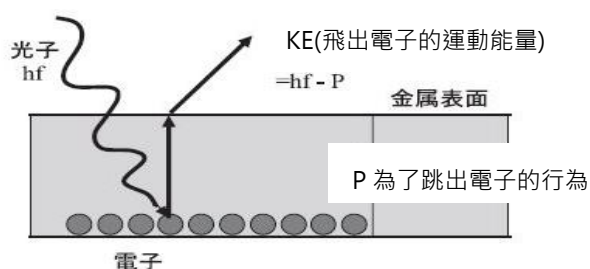
理學的信奉者，因此傳言他對「能量只有非連續性的值」等想法抱持著懷疑的態度。謠傳在這個奇蹟似的論文發表後，普朗克自己似乎很少針對「量子化」做發言。在這之後的幾年間大家並未注意到普朗克的理論內暗藏的新奇特性，「量子」也因此沉寂了數年。而這數年的時間彷彿是為了等待愛因斯坦成年似的。

將這扇已被打開的大門敞開的並不是哪所知名大學的教授，而是當時才 26 歲的瑞士專利局 3 級技術專員(審查官)—阿爾伯特·愛因斯坦。在普



朗克奇蹟似的發表後過了 5 年，愛因斯坦於 1905 年發表了光量子假說。普朗克的量子到最後只是將空腔壁的振動器能量量化成一個值而已，但愛因斯坦的光量子假說則是提唱頻率數 f 的光是由電磁波(波動)及 $E=nhf(n=1,2,3\dots)$ 的能量粒子所組成的；而光是以光速移動且質量為 0 的粒子。愛因斯坦所提出的想法將普朗克所發表的輻射場(空腔壁的振動器)的非連續性能量變化的這個概念擴展至其他地方，不過並不是為了支持普朗克的理論，因此普朗克對此並不支持。至此，光波的性質已大致確認，但光是粒子的這個概念尚未被接受。而光波及粒子的二象性真正被確立的時間是在 1923 年康普頓效應被發現後。

愛因斯坦在同一年(1905 年)裡發表了光量子假說、布朗運動理論及狹義相對論等 5 個重要的論文，因此這年被稱作「奇蹟之年」。順道一提，愛因斯坦在 2 年後(1907 年)發表了最著名的公式 $E=mc^2$ ，更在 1916 年發表了廣義相對論。這些發表皆是於愛因斯坦 26 歲到 37 歲的



短短 11 年內所發生的。

愛因斯坦的光量子假說是為了說明物質在受到光照時電子會飛出等的外部光電現象而發表的假說(圖 2)。假設入射光是由 hf 量級的能量子(光子)所組成，光子在通過金屬表面時，會將所有的能量給予其中一個電子，而獲得能量的電子會消耗其中一部分的能量，進而到達金屬表面。為了進入到自由空間裡，在金屬內的電子必須經過一番努力(P)。運動能量 E 是從 hf (入射光子能量)減去 P (為了跳出金屬的行為)的值，因此 $E = hf - P$ 。

以上便是愛因斯坦所提出的光電效應的雛形。愛因斯坦也證實了施加阻斷電壓 V_0 可阻止電子從金屬跳出，此關係式為 $qV_0 = hf - P$ ，是簡單的線性函數(q 等於電子的電荷)。愛因斯坦對幾個不同頻率的光施予阻斷電壓 V_0 ，且證實實驗值與線性函數是相符合的，而這個數據也成為了愛因斯坦光子概念的決定性證據。

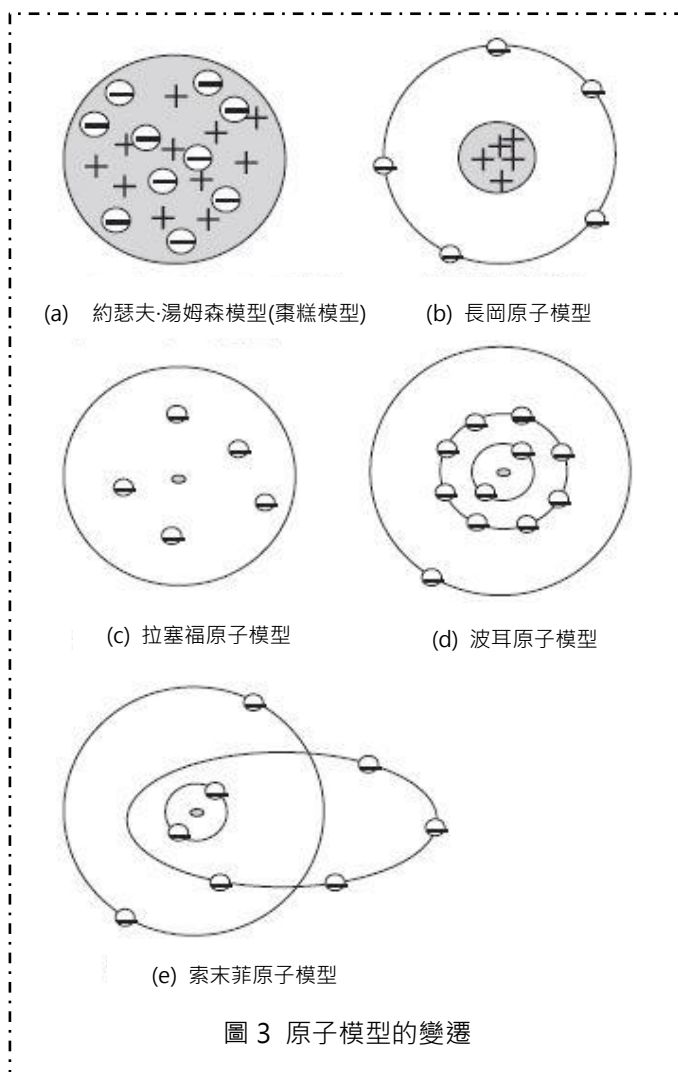
芝加哥大學的羅伯特·密立根身為頑固的古典物理學家，為了否定愛因斯坦所提出的假說，從 1912 年開始花費了 17 年不斷的重複此實驗。只可惜，密立根不管做了幾次實驗，結果幾乎完全符合愛因斯坦所提出的線性函數，反而讓愛因斯坦的假說更加確立。而愛因斯坦也因為這個假說而得到了諾貝爾獎。

普朗克在發表能量量子化後停滯了 5 年左右，後來因為愛因斯坦的光量子假說，才又將單純的空腔壁振動器量子化擴展至光的振動器量子化。然而，讓世人了解到量子的驚人之處的也是愛因斯坦。他在 1907 年提出固態論並在其中直接引用普朗克的量子概念，將其當作現實中固體的粗糙模型，最後得出了固態比熱的公式。

這個指標性的實驗後來被能斯特所證實，他所預測的超導現象也受到大家的認可，並在固態論發表的 2-3 年後成為世人注目的焦點。

在這之後，大多數的科學家開始嘗試從各種現象中取出量子，而 1911 年更在布魯塞爾舉辦了以「輻射及量子」為主題的索爾維會議。這個會議裡的討論也讓「量子假說是可行的」這件事得到國際認可。

原子模型的發想與進步



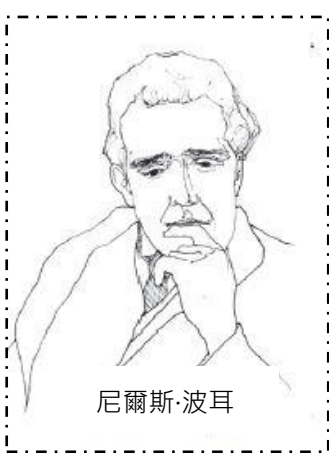
多虧於比利時人波耳將普朗克與愛因斯坦所提出的空腔內壁的振動器及光能的量子化運用在電子的角動量上，才使世人可以一窺原子核周圍電子的樣貌。

直到 20 世紀初，科學家們才相信原子的存在。最開始的原子模型是在 1902 年由克耳文男爵所提出。如圖 3(a)所示，非粒子的正電荷均勻的散佈在直徑 1 \AA 的球形內，而在這個的內部有幾個為了抵銷正電荷而存在的電子正在運行。方才介紹過的約瑟夫·湯姆森(提出電子為粒子的理論)，據說在 1904 年發表的原子模型即是參考威廉·湯姆森(克耳文男爵)的。

圖 3(b)所示的行星式的原子模型，是由 1903 年日本的長岡半太郎所提出。長岡提出的原子模型是中心由正電荷所聚集而成的區塊而周遭被電子圍繞的構造。原子外圍的圓周上有多個電子等距排列。

在這之後，約瑟夫·湯姆森任職於劍橋大學時的學生歐尼斯特·拉塞福，在擔任曼徹斯特大學

物理學教授時(1909年)發現了原子中心的「原子核」。拉塞福為了查出威廉·湯姆森模型與長岡模型哪一個是正確的，便讓學生蓋革及馬斯登進行了散射實驗，研究原子與 α 粒子碰撞後 α 粒子的散射軌跡。根據實驗結果發現，原子內部幾乎是空的，在中心僅有全部體積的10億分之1大小的原子核。後來拉塞福便根據此結果於1911年提出如圖3(c)所示的拉塞福模型。原子核周圍有電子圍繞著轉動，也被稱為原子的太陽系模型。不過為何電子會繞著原子核打轉呢？又是為何明明有加速度，但電子卻沒有持續放出同步輻射呢？若想解開這些疑問，新的假說是必要的。



尼爾斯·波耳

嘗試提出這個假說的是1912年拉塞福在曼徹斯特大學任教時的丹麥學生—尼爾斯·波耳。波耳一開始雖然是在約瑟夫·湯姆森的底下做研究的，但因對其提出的棗糕模型感到失望，後來便選擇到拉塞福的底下研究。波耳在

往後的50年生涯中從不曾停止過這個研究。在同年的夏天波耳針對拉塞福所提出的問題—原子的安定性作研究，寫出了題目為「原子與分子的結構」的論文草稿。而讓波耳解開這個疑問的關鍵即是普朗克及愛因斯坦的量子化理論。波耳發現電子在原子周圍有特別的軌道可使其安定地運行，並猜測這應該與光子的能量與頻率的量子論關係式 $E=nhf$ 有關。在隔年的1913年，波耳因發現了巴耳末公式而有了重大的突破。

約翰·雅可布·巴耳末是一名瑞士的數學老師，他花費了好幾個月嘗試計算元素中最單純的氫原子被加熱時所產生的光譜(通過分光鏡將光從可見光區域分離到紫外區域並按波長的順序排列)的頻率 F ，並在1885年時導出了一個具有規律性的公式。這個公式為簡單式 $f=R(1/n_f^2-1/n_i^2)$ 。巴耳末成功地推算出當這個公式的 R (芮得柏常量)等於 3.29163×10^{15} 且 n_f 等於2，並使 n_i 等於3、4、5、6時，可取得四條氫

譜線的頻率。

另一方面，波耳在注意到巴耳末公式的前一年(1912)於劍橋大學認識的J.W.尼科爾森，在1913年與埃倫費斯特等等的數學家們將電子圍繞著原子核轉動的角動量量子化，並且計算出氫原子精確的角動量值 $L=mvr=n(h/2\pi)$ 。普朗克及愛因斯坦量化了振盪運動；尼科爾森等人則是量化了迴轉運動。而除此之外，其他像是平移運動的量化也一一被計算出來。

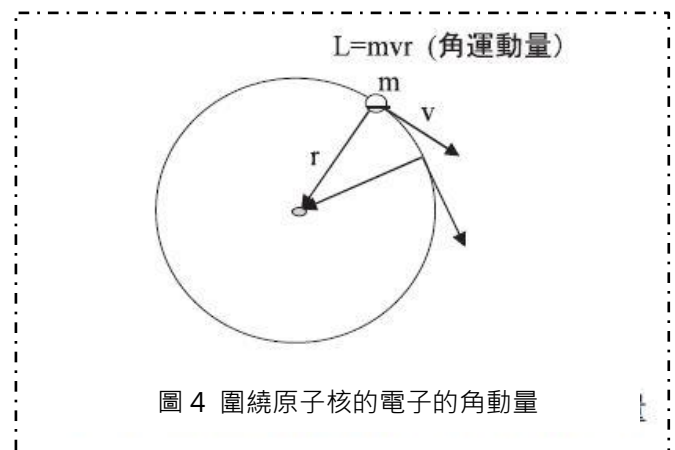


圖4 圍繞原子核的電子的角動量

1913年的4月，當時的波耳27歲，他發表了一篇歷史性的論文。論文內容盡可能簡單地描述氫原子內電子的圓周運動，並算出電子圍繞原子的軌道，而由此得出軌道半徑量子化，此即波耳模型(圖3(d))。量子的條件為 $|E|=nhf/2$ ($n=1, 2, \dots$)， f 為軌道運動的振動數(頻率)，但若是使用振動器的話將會產生變數。至此也有了「基態」及「激發態」等的概念。基態下，電子和原子核間會產生庫倫力，使電子處於能量守恆的狀態，並照著一定的軌跡走。在基態下的電子就像是在太陽周圍圍繞著的行星一樣。

在古典力學方面，早在艾薩克·牛頓出生前的1619年天文學家克卜勒便發現了行星的運動法則。這個發現使得哥白尼所提倡的地動說(日心說)比起天動說(地心說)更具說服力。除此之外，牛頓的萬有引力學說也是以這個法則為基礎。從克卜勒的第3法則及量子條件的關係得出第 n 個軌道的電子能量為 $E_n = -mq^4 / (2h^2 n^2)$ 。當 $n=1$ 時電子軌道的半徑 r 為 $r = (h^2 / (4\pi^2 q^2)) n^2$ 當 n 為 0.528 \AA 時，能階是最低的(基態)，且氫原子的半徑一致，被稱為波耳半徑。接著，波耳將軌道的電子移動並增加了從原本的軌道移動到另一個軌道時電子發射光與吸收

光的模型，這個時候光能為 $E=hf=E_n-E_{n'}$ 。f 為光的頻率， E_n 、 $E_{n'}$ 則是移動前後的電子能量。電子在移動時透過光的放出與吸收來達到能量守恆。這也間接證實了愛因斯坦光電效應理論的模型。若再將巴耳末的公式 $f=R$

$(1/n_r^2-1/n_i^2)$ 中的芮得柏常量 R 替換成 $f=(2\pi mq^4/h^3)(1/n_r^2-1/n_i^2)$ 的話，便可和古典物理學及量子力學相融合。巴耳末的公式 $R=2\pi mq^4/h^3$ 所得出的值與巴耳末等人實際作實驗後所得的值是一致的，由此可確認這個模型是正確的。1914 年時波耳的模型使用了 q 、 m 、 h 的值，和實測值雖沒有百分之百吻合，但其正確性還是被大家所認同。透過波耳的原子模型也確立了氫原子的光譜的周期性。

而波耳的原子模型在被慕尼黑主修理論物理學的大學教授阿諾·索末菲修正後更趨成熟。即便是單純的氫原子，也會有新的譜線產生，因此波耳的模型也出現了無法解釋的現象。本來提出行星運動的克卜勒也認為一般的行星運動多呈橢圓形，極少數才為圓形，因此電子的軌道也不可能單單是有一個量子數 n 的圓形軌道就能概括的。索末菲為了對應橢圓軌道，導入了第 2 量子數 k ，它是具有特殊形狀的軌道，並與 n 的單位相同($h/2\pi$)。此外索末菲也將代表軌道方向的第 3 量子數 m 定義為磁量子數。這即是塞曼效應(原子在磁力環境下電子軌道會改變並產生新譜線)的重要依據之一。據上述說明，索末菲的原子模型內的電子軌道如圖 3 (e) 所示。1916 年 2 月，愛因斯坦在給索末菲的信裡稱這個結果為「上帝的啟示」，波耳也附和道：「沒有什麼東西能比你這美麗的研究更令人愉悅的了」。

只不過在這之後，因為磁場的改變，又出現了另一條新的譜線，此一現象被稱為反常塞曼效應。到了 1924 年，這條譜線成了物理學家們致力解開的謎題之一。將這道謎題破解的便是慕尼黑大學教授索末菲的學生—瑞士的理論物理學家沃夫岡·包立。包立是一位不擅長作實驗的物理學家，幾乎是只要一進到實驗室，就一定會弄壞實驗裝置。他周遭的實驗夥伴們稱這個叫包立效應，甚至禁止包立進入實驗室。

包立所提出的假說認為，反常塞曼效應是因

為電子的異常自旋產生出不必要的角動量所造成的。包立提出了含有 2 個可能值的第 4 量子數 s ，以此解釋反常塞曼效應產生的原因。除此之外他還有另一個重要貢獻。那就是提出非常簡單明瞭的「包立不相容原理」。也就是說在原子裡的每一個電子皆由 4 種量子數所組成(量子狀態)，而相同量子狀態的電子無法同時存在於同一個原子內。這個原理在之後的電子分布上也是不可或缺的法則。其實在當初包立並不曉得剛提到的第 4 量子數 s 之後竟然能解釋反常塞曼效應。在那時候，來自美國的荷蘭人克若尼便以提出了電子自旋的現象應該與 2 個可能值有關的想法，但當時的包立以「古典物理學的角度來看這是十分幼稚的想法」為由駁回了。

直到 1925 年 10 月，同為荷蘭人的烏倫貝克及高德斯密特提出了和克若尼一樣的想法時，電子自旋說才得到認可。電子的自旋分為順時針(向上旋轉)及逆時針(向下旋轉)，這和包立所提出的含 2 個可能值的量子數不謀而合。這個旋轉在未來的一年中，在新量子力學上扮演著舉足輕重的角色。

最初由拉塞福發現了原子核，而波耳以此做出了軌道模型，而這個模型再經由索末菲及包立之手並在最初的電子軌道大小 n 上加上了軌道的形狀 k 、軌道的方向 m 及電子的旋轉 s 等 4 個量子數，最後搭配上包立不相容原理終於完成了現在的原子模型。因為有了這個原子模型，才有可能說明氫原子的光譜、原子中的能量狀態及元素的頻率等現象。

德布羅意的物質波(波粒二象性)

德布羅意的物質波說與普朗克的量子假說並列成為了量子力學本質上的新概念，並被認為是量子力學的起源。愛因斯坦於 1905 提出了光電效應，其中提到光是粒子(光粒子)等概念。但波耳等人並不相信光是粒子這件事，並迴避愛因斯坦的這個假說。原



路易·德布羅意

因是在當時雖然光譜技術已成熟，可透過實驗精細地分析出光波的特質，但和電子散射實驗密切相關的真空技術等尚未成熟。一直到 1920 年代這個技術才逐漸有人關注。1923 年，康普頓從電子的 X 射線散射中發現了康普頓效應，也因此為光量子說取得了有利的證據。康普頓效應是指 X 射線(光)在與電子衝撞時，將一部分的能量給了電子導致 X 射線的波長產生變化的現象。與電子衝突後將能量給予電子的這個現象正是「光為粒子」的最佳證明。再搭配古典力學所提及的波的性質去解釋的話，便可證明光波及粒子二象性的存在。

如前述，約瑟夫·湯姆森年 1897 年時便提出「電子為粒子」這個概念，但在 1920 年代之前學者們並沒有將其與波的性質作聯想。而受到了愛因斯坦光電效應的影響，法國公爵路易·德布羅意便開始思考電子內是否也有波及粒子的共存性。1923 年還是巴黎大學研究生的路易·德布羅意提出粒子會像波一樣產生波動的想法，並於 1924 年以此作為博士論文的主題。在研究過程中，路易·德布羅意將愛因斯坦的公式 $E = mc^2$ 加以變化為 $E = (mc)(c) = (P)(f\lambda)$ 。P 為運動量、 λ 微波長 ($c = f\lambda$)。接著，從普朗克及愛因斯坦發現的公式 $E = hf$ 與上述公式中得出 $hf = (P)(f\lambda)$ ，整理後得出 $\lambda = h/P$ 。從這個公式可看出波的波長 (λ) 與粒子 (P) 的運動量成反比，再將所有的物質加上普朗克係數後，便可證明波粒二象性的存在。「物質(粒子)也有波動的性質」這句話也說明了物質粒子具有波長的特性。一般若要實際觀測波的性質時需要在像電子般微小的微觀世界中才能觀測，普通的日常生活中(宏觀世界)是難以辦到的，除非特定的狀況(例如：超流體)。1927 年約瑟夫·湯姆森的獨子喬治·湯姆森與柯林頓·戴維孫這兩個人透過金屬表面的電子繞射實驗證實了電子具有波的性質。兩個人雖然分別在英國與美國用各自的方法進行實踐，但卻幾乎同時發現了這個現象。湯姆森父子的爸爸發現了電子的粒子性，而他兒子則是在 30 年後發現了電子具有波的性質。

德布羅意雖然都稱電子的波為「飛行波」，但其後來被世人稱為德布羅意波或者是物質波。

除此之外，德布羅意也提出電子在原子核周遭繞行的時候電子粒子的波是駐波，而波長 λ 的 n 倍剛好等於電子軌道的圓周 $2\pi r$ ，而圍繞在原子周圍電子的波不多不少，剛好為一圈。結果得出駐波為 $n\lambda = 2\pi r$ ，將此套入德布羅意的公式： $\lambda = h/P = h/(mv)$ 後得出 $(h/mv) = 2\pi r$ ，將其整理後得出 $n(h/2\pi) = mvr$ ，這個公式正好與波耳的量子條件一致。波耳的量子條件是指電子的波(駐波)剛好為圓周的一周。由此得證，波耳的量子條件並非只是假說。

以上為「前期量子學」的篇章。接下來將針對「量子力學的成熟與半導體的應用」的部分作介紹。
